Teoría de juegos en forma extensiva (repaso)

Microeconomía III

Leandro Zipitría

Facultad de Ciencias Económicas y Administración

Licenciatura en Economía

Objetivos

1. Presentar juegos en forma extensiva finitos
2. Determinar las características de los juegos extensivos infinitos

Objetivos

1. Presentar juegos en forma extensiva finitos
2. Determinar las características de los juegos extensivos infinitos

Índice

Definición

- Un **juego en forma extensiva** es:

1. un árbol de juego conteniendo un nodo inicial, otros nodos de decisión, nodos terminales, y ramas que conectan cada nodo de decisión con el nodo sucesor
2. una lista de $N \geq 1$ jugadores, indexados por i, $i = 1, \ldots, N$
3. para cada nodo de decisión la asignación del jugador que debe decidir una acción
4. para cada jugador i, el conjunto de acciones de i en cada nodo de decisión en el cual tenga que elegir una acción
5. la especificación de los pagos de cada jugador en cada nodo terminal

Definición

- Un **juego en forma extensiva** es:

1. un árbol de juego conteniendo un nodo inicial, otros nodos de decisión, nodos terminales, y ramas que conectan cada nodo de decisión con el nodo sucesor
2. una lista de $N \geq 1$ jugadores, indexados por i, $i = 1, \ldots, N$
3. para cada nodo de decisión la asignación del jugador que debe decidir una acción
4. para cada jugador i, el conjunto de acciones de i en cada nodo de decisión en el cual tenga que elegir una acción
5. la especificación de los pagos de cada jugador en cada nodo terminal

Definición

- Un **juego en forma extensiva** es:

1. un árbol de juego conteniendo un nodo inicial, otros nodos de decisión, nodos terminales, y ramas que conectan cada nodo de decisión con el nodo sucesor
2. una lista de $N \geq 1$ jugadores, indexados por i, $i = 1, \ldots, N$
3. para cada nodo de decisión la asignación del jugador que debe decidir una acción
4. para cada jugador i, el conjunto de acciones de i en cada nodo de decisión en el cual tenga que elegir una acción
5. la especificación de los pagos de cada jugador en cada nodo terminal

Definición

- Un **juego en forma extensiva** es:

1. un árbol de juego conteniendo un nodo inicial, otros nodos de decisión, nodos terminales, y ramas que conectan cada nodo de decisión con el nodo sucesor
2. una lista de $N \geq 1$ jugadores, indexados por i, $i = 1, \ldots, N$
3. para cada nodo de decisión la asignación del jugador que debe decidir una acción
4. para cada jugador i, el conjunto de acciones de i en cada nodo de decisión en el cual tenga que elegir una acción
5. la especificación de los pagos de cada jugador en cada nodo terminal

Definición

- Un **juego en forma extensiva** es:

1. un árbol de juego conteniendo un nodo inicial, otros nodos de decisión, nodos terminales, y ramas que conectan cada nodo de decisión con el nodo sucesor
2. una lista de $N \geq 1$ jugadores, indexados por i, $i = 1, \ldots, N$
3. para cada nodo de decisión la asignación del jugador que debe decidir una acción
4. para cada jugador i, el conjunto de acciones de i en cada nodo de decisión en el cual tenga que elegir una acción
5. la especificación de los pagos de cada jugador en cada nodo terminal

Definición

- Un **juego en forma extensiva** es:

1. un árbol de juego conteniendo un nodo inicial, otros nodos de decisión, nodos terminales, y ramas que conectan cada nodo de decisión con el nodo sucesor
2. una lista de $N \geq 1$ jugadores, indexados por i, $i = 1, \ldots, N$
3. para cada nodo de decisión la asignación del jugador que debe decidir una acción
4. para cada jugador i, el conjunto de acciones de i en cada nodo de decisión en el cual tenga que elegir una acción
5. la especificación de los pagos de cada jugador en cada nodo terminal

Representación en forma normal

Nota

Todo juego en forma extensiva se puede representar a través de un **único** juego forma normal (no se cumple el recíproco)

- Las estrategias puras del juego en forma extensiva serán las estrategias puras del juego en forma normal
- El conjunto de pagos del juego en forma normal dependerá de cómo la combinación de estrategias puras determina la selección de los nodos terminales

Representación en forma normal

Nota

Todo juego en forma extensiva se puede representar a través de un **único** juego forma normal (no se cumple el recíproco)

- Las estrategias puras del juego en forma extensiva serán las estrategias puras del juego en forma normal
- El conjunto de pagos del juego en forma normal dependerá de cómo la combinación de estrategias puras determina la selección de los nodos terminales

Representación en forma normal

Nota

Todo juego en forma extensiva se puede representar a través de un **único** juego forma normal (no se cumple el recíproco)

- Las estrategias puras del juego en forma extensiva serán las estrategias puras del juego en forma normal
- El conjunto de pagos del juego en forma normal dependerá de cómo la combinación de estrategias puras determina la selección de los nodos terminales

Subjuegos

Definición

una **estrategia** para el jugador i, $s_i \in S_i$ es una lista completa de acciones, una acción para cada nodo de decisión en el cual el jugador tenga que actuar

Definición

un **subjuego** empieza en cualquier nodo de decisión del juego original e incluye todos los nodos de decisión siguientes y sus correspondientes nodos terminales

Subjuegos

Definición

una **estrategia** para el jugador i, $s_i \in S_i$ es una lista completa de acciones, una acción para cada nodo de decisión en el cual el jugador tenga que actuar

Definición

un **subjuego** empieza en cualquier nodo de decisión del juego original e incluye todos los nodos de decisión siguientes y sus correspondientes nodos terminales

Índice

Definición

Definición

un resultado es un **Equilibrio de Nash Perfecto por subjuegos** (ENPSJ) si induce un EN en cada subjuego del juego original

- El ENPSJ es un refinamiento del EN
- El EN es un concepto de equilibrio estático $\Rightarrow$ no considera la dinámica de la toma de decisiones $\Rightarrow$ algunos equilibrios se basarán en amenazas no creíbles

Definición

Definición

un resultado es un **Equilibrio de Nash Perfecto por subjuegos** (ENPSJ) si induce un EN en cada subjuego del juego original

- El ENPSJ es un refinamiento del EN
- El EN es un concepto de equilibrio estático $\Rightarrow$ no considera la dinámica de la toma de decisiones $\Rightarrow$ algunos equilibrios se basarán en amenazas no creíbles

Definición

Definición

un resultado es un **Equilibrio de Nash Perfecto por subjuegos** (ENPSJ) si induce un EN en cada subjuego del juego original

- El ENPSJ es un refinamiento del EN
- El EN es un concepto de equilibrio estático ⇒ no considera la dinámica de la toma de decisiones ⇒ algunos equilibrios se basarán en amenazas no creíbles

Definición

Definición

un resultado es un **Equilibrio de Nash Perfecto por subjuegos** (ENPSJ) si induce un EN en cada subjuego del juego original

- El ENPSJ es un refinamiento del EN
- El EN es un concepto de equilibrio estático $\Rightarrow$ no considera la dinámica de la toma de decisiones $\Rightarrow$ algunos equilibrios se basarán en amenazas no creíbles

Índice

Ejemplo: batalla de los sexos

- Dos jugadores; $i = (E)lla$, $E(L)$
- Acciones: c- ir al cine a ver una película de acción; b- ir a bailar
- Ambos prefieren pasar el día juntos, pero E prefiere ir a bailar mientras que L prefiere ir a ver una película de acción
- Estructura del juego: primero decide E qué hacer y luego elige L sabiendo lo que E eligió antes
- Representación gráfica:

Ejemplo: batalla de los sexos

- Dos jugadores; $i = (E)lla, E(L)$
- Acciones: c- ir al cine a ver una película de acción; b- ir a bailar
- Ambos prefieren pasar el día juntos, pero E prefiere ir a bailar mientras que L prefiere ir a ver una película de acción
- Estructura del juego: primero decide E qué hacer y luego elige L sabiendo lo que E eligió antes
- Representación gráfica:

Ejemplo: batalla de los sexos

- Dos jugadores; $i = (E)lla, E(L)$
- Acciones: c- ir al cine a ver una película de acción; b- ir a bailar
- Ambos prefieren pasar el día juntos, pero E prefiere ir a bailar mientras que L prefiere ir a ver una película de acción
- Estructura del juego: primero decide E qué hacer y luego elige L sabiendo lo que E eligió antes
- Representación gráfica:

Ejemplo: batalla de los sexos

- Dos jugadores; $i = (E)lla, E(L)$
- Acciones: c- ir al cine a ver una película de acción; b- ir a bailar
- Ambos prefieren pasar el día juntos, pero E prefiere ir a bailar mientras que L prefiere ir a ver una película de acción
- Estructura del juego: primero decide E qué hacer y luego elige L sabiendo lo que E eligió antes
- Representación gráfica:

Ejemplo: batalla de los sexos

- Dos jugadores; $i = (E)lla, E(L)$
- Acciones: c- ir al cine a ver una película de acción; b- ir a bailar
- Ambos prefieren pasar el día juntos, pero E prefiere ir a bailar mientras que L prefiere ir a ver una película de acción
- Estructura del juego: primero decide E qué hacer y luego elige L sabiendo lo que E eligió antes
- Representación gráfica:

Figura

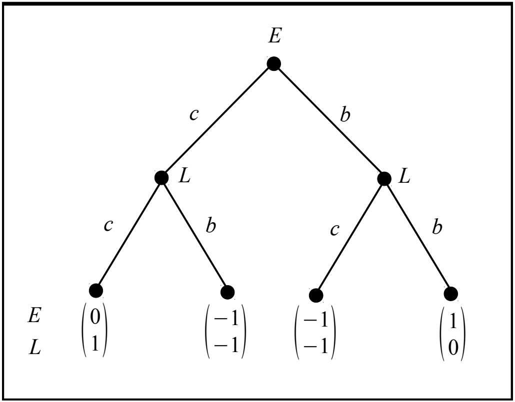

Figura: Juego de la batalla de los sexos.

Ejemplo (cont.)

- Estrategias: $S_E = \{c; b\}$, $S_L = \{c, c; c, b; b, b; b, c\}$.
- E tiene sólo dos acciones en un nodo: decide c o decide b
- L tiene **dos** acciones en **dos** nodos
- Solución: por inducción hacia atrás.

Ejemplo (cont.)

- Estrategias: $S_E = \{c; b\}$, $S_L = \{c, c; c, b; b, b; b, c\}$.
- E tiene sólo dos acciones en un nodo: decide c o decide b
- L tiene **dos** acciones en **dos** nodos
- Solución: por inducción hacia atrás.

Ejemplo (cont.)

- Estrategias: $S_E = \{c; b\}$, $S_L = \{c, c; c, b; b, b; b, c\}$.
- E tiene sólo dos acciones en un nodo: decide c o decide b
- L tiene **dos** acciones en **dos** nodos
- Solución: por inducción hacia atrás.

Ejemplo (cont.)

- Estrategias: $S_E = \{c; b\}$, $S_L = \{c, c; c, b; b, b; b, c\}$.
- E tiene sólo dos acciones en un nodo: decide c o decide b
- L tiene **dos** acciones en **dos** nodos
- Solución: por inducción hacia atrás.

Solución

- Etapa 2: vemos que decisión tomaría L en cada nodo en el que le tocaría jugar
- Gráficamente representamos a la izquierda el subjuego correspondiente al nodo de L de la izquierda del juego original, y a la derecha el subjuego correspondiente al nodo de L de la derecho del juego original

Solución

- Etapa 2: vemos que decisión tomaría L en cada nodo en el que le tocaría jugar
- Gráficamente representamos a la izquierda el subjuego correspondiente al nodo de L de la izquierda del juego original, y a la derecha el subjuego correspondiente al nodo de L de la derecho del juego original

Gráfica

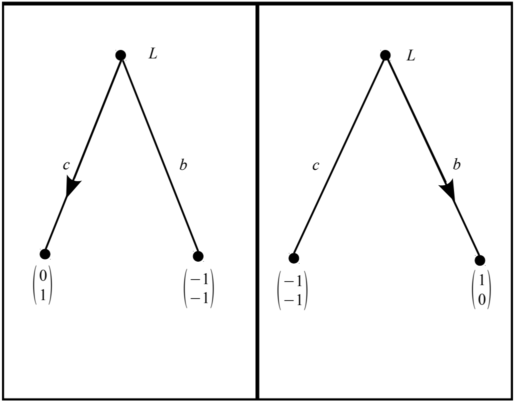

Figura: Subjuegos, con sus correspondientes equilibrios de Nash.

Solución (cont.)

- El EN del subjuego de la izquierda (si E juega c) es jugar c $(1 > 0)$
- El EN del subjuego de la derecha (si E juega b) es jugar b $(0 > -1)$
- Como era de esperar, el caballero hace lo que la dama diga
- ¿Qué hará entonces E?
- La decisión de E estudiando que haría al enfrentarse con las decisiones de L, reduciendo el juego original sustituyendo por las decisiones de L.

Solución (cont.)

- El EN del subjuego de la izquierda (si E juega c) es jugar c $(1 > 0)$
- El EN del subjuego de la derecha (si E juega b) es jugar b $(0 > -1)$
- Como era de esperar, el caballero hace lo que la dama diga
- ¿Qué hará entonces E?
- La decisión de E estudiando que haría al enfrentarse con las decisiones de L, reduciendo el juego original sustituyendo por las decisiones de L.

Solución (cont.)

- El EN del subjuego de la izquierda (si E juega c) es jugar c $(1 > 0)$
- El EN del subjuego de la derecha (si E juega b) es jugar b $(0 > -1)$
- Como era de esperar, el caballero hace lo que la dama diga
- ¿Qué hará entonces E?
- La decisión de E estudiando que haría al enfrentarse con las decisiones de L, reduciendo el juego original sustituyendo por las decisiones de L.

Solución (cont.)

- El EN del subjuego de la izquierda (si E juega c) es jugar c $(1 > 0)$
- El EN del subjuego de la derecha (si E juega b) es jugar b $(0 > -1)$
- Como era de esperar, el caballero hace lo que la dama diga
- ¿Qué hará entonces E?
- La decisión de E estudiando que haría al enfrentarse con las decisiones de L, reduciendo el juego original sustituyendo por las decisiones de L.

Solución (cont.)

- El EN del subjuego de la izquierda (si E juega c) es jugar c $(1 > 0)$
- El EN del subjuego de la derecha (si E juega b) es jugar b $(0 > -1)$
- Como era de esperar, el caballero hace lo que la dama diga
- ¿Qué hará entonces E?
- La decisión de E estudiando que haría al enfrentarse con las decisiones de L, reduciendo el juego original sustituyendo por las decisiones de L.

Gráfica

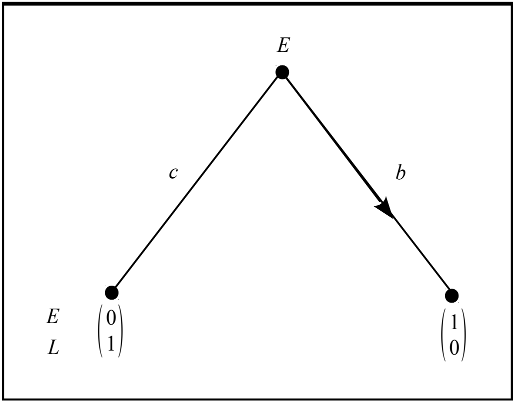

Figura: La decisión de E, tomando en consideración las decisiones de L posteriores.

Representación en forma normal

- El juego puede representarse en forma normal

Jugador L

Jugador E		cc	cb	bc	bb
	c	0, 1	0, 1	-1,-1	-1,-1
	b	-1,-1	1, 0	-1,-1	1, 0

- ¿Cuántos EN hay en el juego?

Representación en forma normal

- El juego puede representarse en forma normal

Jugador L

		cc	*cb*	*bc*	*bb*
Jugador E	*c*	0, 1	0, 1	-1,-1	-1,-1
	b	-1,-1	1, 0	-1,-1	1, 0

- ¿Cuántos EN hay en el juego?

Solución

- Hay 3 EN: $\{b, cb;\ b, bb;\ c, cc\}$

Jugador L

		cc	cb	bc	bb
Jugador E	c	**0, 1**	0, 1	-1,-1	-1,-1
	b	-1,-1	**1, 0**	-1,-1	**1, 0**

Solución (cont.)

- El resultado del juego: el ENPSJ es$\{b; c, b\}$.
- Sin embargo, hay dos EN $\{b, cb; b, bb; c, cc\}$
- En los juegos dinámicos es normal encontrar múltiples EN
- Muchos de ellos no son creíbles, ej. $\{c, cc\}$

Solución (cont.)

- El resultado del juego: el ENPSJ es$\{b; c, b\}$.
- Sin embargo, hay dos EN $\{b, cb; b, bb; c, cc\}$
- En los juegos dinámicos es normal encontrar múltiples EN
- Muchos de ellos no son creíbles, ej. $\{c, cc\}$

Solución (cont.)

- El resultado del juego: el ENPSJ es$\{b; c, b\}$.
- Sin embargo, hay dos EN $\{b, cb; b, bb; c, cc\}$
- En los juegos dinámicos es normal encontrar múltiples EN
- Muchos de ellos no son creíbles, ej. $\{c, cc\}$

Solución (cont.)

- El resultado del juego: el ENPSJ es$\{b; c, b\}$.
- Sin embargo, hay dos EN $\{b, cb; b, bb; c, cc\}$
- En los juegos dinámicos es normal encontrar múltiples EN
- Muchos de ellos no son creíbles, ej. $\{c, cc\}$

Ejemplo: entrada al mercado

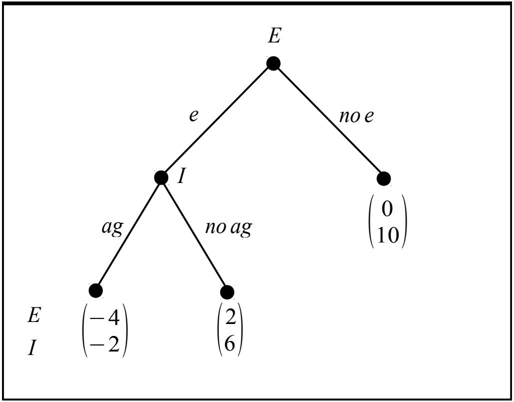

Figura: Juego de entrada al mercado.

Solución

- Dos jugadores: $\{I, E\}$
- E decide si entra o no; I si E entra decide si es agresivo o no
- Existen dos EN: $\{e, noag; ne, ag\}$
- Sin embargo, ne, ag es una amenaza no creíble
- Sólo $\{e, noag\}$ es un ENPSJ

Solución

- Dos jugadores: $\{I, E\}$
- E decide si entra o no; I si E entra decide si es agresivo o no
- Existen dos EN: $\{e, noag; ne, ag\}$
- Sin embargo, ne, ag es una amenaza no creíble
- Sólo $\{e, noag\}$ es un ENPSJ

Solución

- Dos jugadores: $\{I, E\}$
- E decide si entra o no; I si E entra decide si es agresivo o no
- Existen dos EN: $\{e, noag; ne, ag\}$
- Sin embargo, ne, ag es una amenaza no creíble
- Sólo $\{e, noag\}$ es un ENPSJ

Solución

- Dos jugadores: $\{I, E\}$
- E decide si entra o no; I si E entra decide si es agresivo o no
- Existen dos EN: $\{e, noag; ne, ag\}$
- Sin embargo, ne, ag es una amenaza no creíble
- Sólo $\{e, noag\}$ es un ENPSJ

Solución

- Dos jugadores: $\{I, E\}$
- E decide si entra o no; I si E entra decide si es agresivo o no
- Existen dos EN: $\{e, noag; ne, ag\}$
- Sin embargo, ne, ag es una amenaza no creíble
- Sólo $\{e, noag\}$ es un ENPSJ

Índice

Presentación

- Sea $G = \{I; (S_i)_{i=1}^{n}; u_i(s_i, s_{-i})\}$ el juego en forma normal en una etapa

Definición

dado un juego G en una etapa, $G(T)$ denota el **juego repetido finito**, en el que G se juega T veces, habiendo los jugadores observado los resultados de todas las jugadas anteriores antes de empezar la siguiente. Las ganancias de $G(T)$ son la suma de las ganancias de los T juegos de una etapa.

Presentación

- Sea $G = \{I; (S_i)_{i=1}^{n}; u_i(s_i, s_{-i})\}$ el juego en forma normal en una etapa

Definición

dado un juego G en una etapa, $G(T)$ denota el **juego repetido finito**, en el que G se juega T veces, habiendo los jugadores observado los resultados de todas las jugadas anteriores antes de empezar la siguiente. Las ganancias de $G(T)$ son la suma de las ganancias de los T juegos de una etapa.

Proposiciones

Teorema

Si el juego en forma normal G tiene un único EN $\Rightarrow$ para cualquier T finito, el juego repetido $G(T)$ tiene un único ENPSJ: en cada etapa se juega el EN de G

Teorema

Si el juego en forma normal G tiene múltiples EN $\Rightarrow$ pueden existir resultados perfectos en subjuegos del juego repetido $G(T)$ en los que, para cualquier $t < T$, el resultado en la etapa t no sea un EN de G

Proposiciones

Teorema

Si el juego en forma normal G tiene un único EN $\Rightarrow$ para cualquier T finito, el juego repetido $G(T)$ tiene un único ENPSJ: en cada etapa se juega el EN de G

Teorema

Si el juego en forma normal G tiene múltiples EN $\Rightarrow$ pueden existir resultados perfectos en subjuegos del juego repetido $G(T)$ en los que, para cualquier $t < T$, el resultado en la etapa t no sea un EN de G

Ejemplo 1

- Sea el juego del dilema del prisionero jugado dos veces

Ejemplo 1

- Sea el juego del dilema del prisionero jugado dos veces

- Un período

		J. 2	
		I_2	D_2
J. 1	I_1	1, 1	5, 0
	D_1	0, 5	4, 4

- Dos períodos

		J. 2	
		I_2	D_2
J. 1	I_1	2, 2	6, 1
	D_1	1, 6	5, 5

Ejemplo 1

- Sea el juego del dilema del prisionero jugado dos veces

- Un período (J. 1 filas, J. 2 columnas)

	I_2	D_2
I_1	1, 1	5, 0
D_1	0, 5	4, 4

- Dos períodos (J. 1 filas, J. 2 columnas)

	I_2	D_2
I_1	2, 2	6, 1
D_1	1, 6	5, 5

Ejemplo 1

- Sea el juego del dilema del prisionero jugado dos veces

-

J. 1 \ J. 2	I_2	D_2
I_1	1, 1	5, 0
D_1	0, 5	4, 4

Un período

-

J. 1 \ J. 2	I_2	D_2
I_1	2, 2	6, 1
D_1	1, 6	5, 5

Dos períodos

Ejemplo 1 (cont.)

- La figura de la izquierda es el juego en una etapa
- La figura de la derecha es el juego en dos etapas que incluye los pagos de la segunda etapa
- Como el EN en una etapa es $(I_1, I_2) \Rightarrow$ el juego en dos etapas incluye los pagos de jugar (I_1, I_2) en $t = 2$
- $\Rightarrow$ el EN es (I_1, I_2) en $t = 1$ y (I_1, I_2) en $t = 2$

Ejemplo 1 (cont.)

- La figura de la izquierda es el juego en una etapa
- La figura de la derecha es el juego en dos etapas que incluye los pagos de la segunda etapa
- Como el EN en una etapa es $(l_1, l_2) \Rightarrow$ el juego en dos etapas incluye los pagos de jugar (l_1, l_2) en $t = 2$
- $\Rightarrow$ el EN es (l_1, l_2) en $t = 1$ y (l_1, l_2) en $t = 2$

Ejemplo 1 (cont.)

- La figura de la izquierda es el juego en una etapa
- La figura de la derecha es el juego en dos etapas que incluye los pagos de la segunda etapa
- Como el EN en una etapa es $(l_1, l_2) \Rightarrow$ el juego en dos etapas incluye los pagos de jugar (l_1, l_2) en $t = 2$
- $\Rightarrow$ el EN es (l_1, l_2) en $t = 1$ y (l_1, l_2) en $t = 2$

Ejemplo 1 (cont.)

- La figura de la izquierda es el juego en una etapa
- La figura de la derecha es el juego en dos etapas que incluye los pagos de la segunda etapa
- Como el EN en una etapa es $(I_1, I_2) \Rightarrow$ el juego en dos etapas incluye los pagos de jugar (I_1, I_2) en $t = 2$
- $\Rightarrow$ el EN es (I_1, I_2) en $t = 1$ y (I_1, I_2) en $t = 2$

Ejemplo 2

- Juego del dilema del prisionero modificado

		J. 2		
		I_2	C_2	D_2
	I_1	1, 1	5, 0	0, 0
J. 1	C_1	0, 5	4, 4	0, 0
	D_1	0, 0	0, 0	3, 3

Ejemplo 2 (cont.)

- El juego tiene 2 EN: $\{(I_1, I_2), (D_1, D_2)\}$
- Ahora es posible que los jugadores prevean equilibrios diferentes en $t = 2$ si hay resultados diferentes en $t = 1$
- Ej.: (D_1, D_2) en $t = 2$ si se juega (C_1, C_2) en $t = 1$; pero (I_1, I_2) en $t = 2$ si se juega cualquiera de los otros resultados en $t = 1$
- La matriz que representa estos pagos es

Ejemplo 2 (cont.)

- El juego tiene 2 EN: $\{(I_1, I_2), (D_1, D_2)\}$
- Ahora es posible que los jugadores prevean equilibrios diferentes en $t = 2$ si hay resultados diferentes en $t = 1$
- Ej.: (D_1, D_2) en $t = 2$ si se juega (C_1, C_2) en $t = 1$; pero (I_1, I_2) en $t = 2$ si se juega cualquiera de los otros resultados en $t = 1$
- La matriz que representa estos pagos es

Ejemplo 2 (cont.)

- El juego tiene 2 EN: $\{(I_1, I_2), (D_1, D_2)\}$
- Ahora es posible que los jugadores prevean equilibrios diferentes en $t = 2$ si hay resultados diferentes en $t = 1$
- Ej.: (D_1, D_2) en $t = 2$ si se juega (C_1, C_2) en $t = 1$; pero (I_1, I_2) en $t = 2$ si se juega cualquiera de los otros resultados en $t = 1$
- La matriz que representa estos pagos es

Ejemplo 2 (cont.)

- El juego tiene 2 EN: $\{(I_1, I_2), (D_1, D_2)\}$
- Ahora es posible que los jugadores prevean equilibrios diferentes en $t = 2$ si hay resultados diferentes en $t = 1$
- Ej.: (D_1, D_2) en $t = 2$ si se juega (C_1, C_2) en $t = 1$; pero (I_1, I_2) en $t = 2$ si se juega cualquiera de los otros resultados en $t = 1$
- La matriz que representa estos pagos es

Ejemplo 2

		J. 2		
		I_2	C_2	D_2
	I_1	2, 2	6, 1	1, 1
J. 1	C_1	1, 6	7, 7	1, 1
	D_1	1, 1	1, 1	4, 4

Ejemplo 2

- Este juego tiene 3 EN en estrategias puras: $\{(I_1, I_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2)\}$
- El EN (I_1, I_2) corresponde a jugar (I_1, I_2) en $t = 1$ y en $t = 2$
- El EN (D_1, D_2) corresponde a jugar (D_1, D_2) en $t = 1$ y (I_1, I_2) en $t = 2$
- El EN (C_1, C_2) corresponde a jugar (C_1, C_2) en $t = 1$ y (D_1, D_2) en $t = 2$
- Ahora surge la cooperación en $t = 1$, aunque de forma poco creíble
- Se prevé jugar (I_1, I_2) con pagos $(1, 1)$ en cualquier caso menos si se juega (C_1, C_2) que prevé jugar (D_1, D_2) con pagos $(3, 3)$

Ejemplo 2

- Este juego tiene 3 EN en estrategias puras: $\{(I_1, I_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2)\}$
- El EN (I_1, I_2) corresponde a jugar (I_1, I_2) en $t = 1$ y en $t = 2$
- El EN (D_1, D_2) corresponde a jugar (D_1, D_2) en $t = 1$ y (I_1, I_2) en $t = 2$
- El EN (C_1, C_2) corresponde a jugar (C_1, C_2) en $t = 1$ y (D_1, D_2) en $t = 2$
- Ahora surge la cooperación en $t = 1$, aunque de forma poco creíble
- Se prevé jugar (I_1, I_2) con pagos $(1, 1)$ en cualquier caso menos si se juega (C_1, C_2) que prevé jugar (D_1, D_2) con pagos $(3, 3)$

Ejemplo 2

- Este juego tiene 3 EN en estrategias puras: $\{(I_1, I_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2)\}$
- El EN (I_1, I_2) corresponde a jugar (I_1, I_2) en $t = 1$ y en $t = 2$
- El EN (D_1, D_2) corresponde a jugar (D_1, D_2) en $t = 1$ y (I_1, I_2) en $t = 2$
- El EN (C_1, C_2) corresponde a jugar (C_1, C_2) en $t = 1$ y (D_1, D_2) en $t = 2$
- Ahora surge la cooperación en $t = 1$, aunque de forma poco creíble
- Se prevé jugar (I_1, I_2) con pagos $(1, 1)$ en cualquier caso menos si se juega (C_1, C_2) que prevé jugar (D_1, D_2) con pagos $(3, 3)$

Ejemplo 2

- Este juego tiene 3 EN en estrategias puras: $\{(I_1, I_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2)\}$
- El EN (I_1, I_2) corresponde a jugar (I_1, I_2) en $t = 1$ y en $t = 2$
- El EN (D_1, D_2) corresponde a jugar (D_1, D_2) en $t = 1$ y (I_1, I_2) en $t = 2$
- El EN (C_1, C_2) corresponde a jugar (C_1, C_2) en $t = 1$ y (D_1, D_2) en $t = 2$
- Ahora surge la cooperación en $t = 1$, aunque de forma poco creíble
- Se prevé jugar (I_1, I_2) con pagos $(1, 1)$ en cualquier caso menos si se juega (C_1, C_2) que prevé jugar (D_1, D_2) con pagos $(3, 3)$

Ejemplo 2

- Este juego tiene 3 EN en estrategias puras: $\{(I_1, I_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2)\}$
- El EN (I_1, I_2) corresponde a jugar (I_1, I_2) en $t = 1$ y en $t = 2$
- El EN (D_1, D_2) corresponde a jugar (D_1, D_2) en $t = 1$ y (I_1, I_2) en $t = 2$
- El EN (C_1, C_2) corresponde a jugar (C_1, C_2) en $t = 1$ y (D_1, D_2) en $t = 2$
- Ahora surge la cooperación en $t = 1$, aunque de forma poco creíble
- Se prevé jugar (I_1, I_2) con pagos $(1, 1)$ en cualquier caso menos si se juega (C_1, C_2) que prevé jugar (D_1, D_2) con pagos $(3, 3)$

Ejemplo 2

- Este juego tiene 3 EN en estrategias puras: $\{(I_1, I_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2)\}$
- El EN (I_1, I_2) corresponde a jugar (I_1, I_2) en $t = 1$ y en $t = 2$
- El EN (D_1, D_2) corresponde a jugar (D_1, D_2) en $t = 1$ y (I_1, I_2) en $t = 2$
- El EN (C_1, C_2) corresponde a jugar (C_1, C_2) en $t = 1$ y (D_1, D_2) en $t = 2$
- Ahora surge la cooperación en $t = 1$, aunque de forma poco creíble
- Se prevé jugar (I_1, I_2) con pagos $(1, 1)$ en cualquier caso menos si se juega (C_1, C_2) que prevé jugar (D_1, D_2) con pagos $(3, 3)$

Índice

Definición

Definición

dado un factor de descuento δ el **valor presente** de la sucesión infinita de pagos $\pi_1, \pi_2, \ldots$ es

$$\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 + \ldots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\pi_t$$

Definición

Definición

Dado un juego en una etapa G llamaremos $G(\infty, \delta)$ al **juego repetido infinitamente** en el que G se repite por siempre y los jugadores tienen el mismo factor de descuento δ.

Para cada t, los resultados de las $t-1$ jugadas anteriores del juego de etapa son conocidos antes de que empiece la t-ésima etapa.

La utilidad para cada jugador en $G(\infty, \delta)$ es el valor presente de las ganancias que el jugador obtiene en la sucesión infinita de juegos de etapa.

Definición

Definición

Una **estrategia pura** en un juego repetido infinitamente para el jugador i es una secuencia de funciones $\{s_{it}(.)\}_{t=1}^{\infty}$ que mapea de la historia de las acciones previas (H_{t-1}) a su elección de acción en el período t, $s_{it}(H_{t-1}) \in S_i$. El conjunto de todas las estrategias puras para el jugador i es $\sum_i$

Definición

Definición

Un perfil de estrategias $s = (s_1, s_2)$ para los jugadores $1, 2$ en un juego repetidos infinitamente es de **reversión a Nash** si la estrategia de cada jugador implica jugar un sendero Q hasta que algún jugador se desvía y jugar el EN de una etapa (x_1^*, x_2^*) en adelante

ENPSJ

Teorema

Un perfil de estrategias con reversión a Nash que juega el sendero $X = \{x_{1t}, x_{2t}\}_{t=1}^{\infty}$ antes de cualquier desvío es un ENPSJ si y sólo si:

$$\hat{\pi}_i(x_{it}) + \frac{\delta}{1-\delta}\pi_i(x_1^*, x_2^*) \leq v_i(X, t)$$

$\forall t$ *e* $i = 1, 2$.

- Esta proposición establece que un perfil de estrategias X es un ENPSJ si da un valor descontado mayor a la mejor alternativa descontada de un juego en una etapa.

ENPSJ

Teorema

Un perfil de estrategias con reversión a Nash que juega el sendero $X = \{x_{1t}, x_{2t}\}_{t=1}^{\infty}$ antes de cualquier desvío es un ENPSJ si y sólo si:

$$\hat{\pi}_i(x_{it}) + \frac{\delta}{1-\delta}\pi_i(x_1^*, x_2^*) \leq v_i(X, t)$$

$\forall t$ *e* $i = 1, 2$.

- Esta proposición establece que un perfil de estrategias X es un ENPSJ si da un valor descontado mayor a la mejor alternativa descontada de un juego en una etapa.

Extensión

Teorema

Sea un sendero de resultados X que puede sostenerse como un ENPSJ utilizando reversión a Nash cuando la tasa de descuento es δ. Entonces también puede sostenerse para cualquier $\delta' \geq \delta$.