Teoría de juegos

Organización Industrial

Leandro Zipitría[1]

[1]Universidad de Montevideo

Licenciatura en Economía, 2013

Objetivos

1. Definir juegos
2. Presentar juegos en forma normal y estratégica
3. Presentar las nociones de equilibrio

Objetivos

1. Definir juegos
2. Presentar juegos en forma normal y estratégica
3. Presentar las nociones de equilibrio

Objetivos

1. Definir juegos
2. Presentar juegos en forma normal y estratégica
3. Presentar las nociones de equilibrio

Índice

Juegos

- Un juego es la representación formal de una situación estratégica
- Pueden representar rivalidad o problemas de coordinación
- Representación: en forma normal (o estratégica) o extensiva
- Etapas: representación - solución

Juegos

- Un juego es la representación formal de una situación estratégica
- Pueden representar rivalidad o problemas de coordinación
- Representación: en forma normal (o estratégica) o extensiva
- Etapas: representación - solución

Juegos

- Un juego es la representación formal de una situación estratégica
- Pueden representar rivalidad o problemas de coordinación
- Representación: en forma normal (o estratégica) o extensiva
- Etapas: representación - solución

Juegos

- Un juego es la representación formal de una situación estratégica
- Pueden representar rivalidad o problemas de coordinación
- Representación: en forma normal (o estratégica) o extensiva
- Etapas: representación - solución

Componentes

1. **Jugadores**: ¿quién está involucrado?
2. **Reglas**: ¿cómo mueven?; ¿qué saben cuando mueven?; ¿qué pueden hacer?
3. **Resultados**: para cada conjunto posible de acciones de los jugadores: ¿cuáles son los resultados del juego?
4. **Pagos**: ¿cuáles son las preferencias de los jugadores sobre los posibles resultados?

Componentes

1. **Jugadores**: ¿quién está involucrado?
2. **Reglas**: ¿cómo mueven?; ¿qué saben cuando mueven?; ¿qué pueden hacer?
3. **Resultados**: para cada conjunto posible de acciones de los jugadores: ¿cuáles son los resultados del juego?
4. **Pagos**: ¿cuáles son las preferencias de los jugadores sobre los posibles resultados?

Componentes

1. **Jugadores**: ¿quién está involucrado?
2. **Reglas**: ¿cómo mueven?; ¿qué saben cuando mueven?; ¿qué pueden hacer?
3. **Resultados**: para cada conjunto posible de acciones de los jugadores: ¿cuáles son los resultados del juego?
4. **Pagos**: ¿cuáles son las preferencias de los jugadores sobre los posibles resultados?

Componentes

1. **Jugadores**: ¿quién está involucrado?
2. **Reglas**: ¿cómo mueven?; ¿qué saben cuando mueven?; ¿qué pueden hacer?
3. **Resultados**: para cada conjunto posible de acciones de los jugadores: ¿cuáles son los resultados del juego?
4. **Pagos:** ¿cuáles son las preferencias de los jugadores sobre los posibles resultados?

Información

1. Información perfecta: cuando todos los jugadores tienen toda la información relacionada con las acciones previas de los restantes jugadores que afectan la decisión de éste sobre la acción a tomar en un momento particular.
2. Información completa: cuando todos los jugadores conocen la estructura del juego y los pagos de los restantes jugadores, pero no necesariamente sus acciones.

Información

1. Información perfecta: cuando todos los jugadores tienen toda la información relacionada con las acciones previas de los restantes jugadores que afectan la decisión de éste sobre la acción a tomar en un momento particular.
2. Información completa: cuando todos los jugadores conocen la estructura del juego y los pagos de los restantes jugadores, pero no necesariamente sus acciones.

Índice

Presentación

Definiciones

Un **juego en forma normal** es una terna $\Gamma_N = \left\{ I; (S_i)_{i=1}^{I}; u_i(s_i, s_{-i}) \right\}$, donde I es el conjunto de jugadores; S_i que es el espacio de acciones para cada jugador y $u_i$que es la función de utilidad asociada a cada resultado del juego para cada jugador.

Ejemplo

- Ejemplo: Dilema del prisionero
  - Jugadores: prisionero 1, prisionero 2
  - Acciones (estrategias): $S_i = \{c, \overline{c}\}$, $i = 1, 2$, donde c es confesar y $\overline{c}$ no confesar
  - Estructura: juegan sin saber lo que hace el otro
  - Pagos: a- si ambos confiesan tienen una pena de 5 años; b- si el prisionero 1 no confiesa pero el 2 si, el primero obtiene una pena de 10 años y el segundo una pena de 1 año por colaborar con la justicia; c- si ninguno confiesa ambos son procesados por un delito menor y obtienen una pena de 2 años

Ejemplo

- Ejemplo: Dilema del prisionero
  - Jugadores: prisionero 1, prisionero 2
  - Acciones (estrategias): $S_i = \{c, \overline{c}\}$, $i = 1, 2$, donde c es confesar y $\overline{c}$ no confesar
  - Estructura: juegan sin saber lo que hace el otro
  - Pagos: a- si ambos confiesan tienen una pena de 5 años; b- si el prisionero 1 no confiesa pero el 2 si, el primero obtiene una pena de 10 años y el segundo una pena de 1 año por colaborar con la justicia; c- si ninguno confiesa ambos son procesados por un delito menor y obtienen una pena de 2 años

Ejemplo

- Ejemplo: Dilema del prisionero
  - Jugadores: prisionero 1, prisionero 2
  - Acciones (estrategias): $S_i = \{c, \overline{c}\}$, $i = 1, 2$, donde c es confesar y $\overline{c}$ no confesar
  - Estructura: juegan sin saber lo que hace el otro
  - Pagos: a- si ambos confiesan tienen una pena de 5 años; b- si el prisionero 1 no confiesa pero el 2 si, el primero obtiene una pena de 10 años y el segundo una pena de 1 año por colaborar con la justicia; c- si ninguno confiesa ambos son procesados por un delito menor y obtienen una pena de 2 años

Ejemplo

- Ejemplo: Dilema del prisionero
  - Jugadores: prisionero 1, prisionero 2
  - Acciones (estrategias): $S_i = \{c, \overline{c}\}$, $i = 1, 2$, donde c es confesar y $\overline{c}$ no confesar
  - Estructura: juegan sin saber lo que hace el otro
  - Pagos: a- si ambos confiesan tienen una pena de 5 años; b- si el prisionero 1 no confiesa pero el 2 si, el primero obtiene una pena de 10 años y el segundo una pena de 1 año por colaborar con la justicia; c- si ninguno confiesa ambos son procesados por un delito menor y obtienen una pena de 2 años

Ejemplo

- Ejemplo: Dilema del prisionero
  - Jugadores: prisionero 1, prisionero 2
  - Acciones (estrategias): $S_i = \{c, \overline{c}\}$, $i = 1, 2$, donde c es confesar y $\overline{c}$ no confesar
  - Estructura: juegan sin saber lo que hace el otro
  - Pagos: a- si ambos confiesan tienen una pena de 5 años; b- si el prisionero 1 no confiesa pero el 2 si, el primero obtiene una pena de 10 años y el segundo una pena de 1 año por colaborar con la justicia; c- si ninguno confiesa ambos son procesados por un delito menor y obtienen una pena de 2 años

Representación

		PRISIONERO 2	
		c	$\bar{c}$
PRISIONERO 1	c	$-5\,;-5$	$-1\,;-10$
	$\bar{c}$	$-10\,;-1$	$-2\,;-2$

Índice

Dominancia (I)

Definiciones

Decimos que una estrategia s_i está **estrictamente dominada** si independientemente de la acción que pueda tomar el otro jugador, la utilidad asociada a esta estrategia es estrictamente menor a alguna otra estrategia que pueda jugar el jugador i. Formalmente, s_i es una estrategia estrictamente dominada si existe $\widetilde{s}_i$ tal que $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ se cumple que:

$$u_i(\widetilde{s}_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

Dominancia (II)

- Un jugador racional no jugaría nunca una estrategia estrictamente dominada
- Si la racionalidad es conocimiento común, se puede proceder a la **Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas**

Dominancia (II)

- Un jugador racional no jugaría nunca una estrategia estrictamente dominada
- Si la racionalidad es conocimiento común, se puede proceder a la **Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas**

Estrategias dominantes

Definiciones

Decimos que una estrategia s_i es una **estrategia estrictamente dominante** para el jugador i en un juego en forma normal si $\forall s_i^{'} \neq s_i$, se cumple que:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i^{'}, s_{-i})$$

$\forall s_{-i} \in S_{-i}$.

- Una estrategia dominante para el jugador i maximiza su pago para cualquier estrategia que el rival pueda jugar.

Estrategias dominantes

Definiciones

Decimos que una estrategia s_i es una **estrategia estrictamente dominante** para el jugador i en un juego en forma normal si $\forall s_i^{'} \neq s_i$, se cumple que:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i^{'}, s_{-i})$$

$\forall s_{-i} \in S_{-i}$.

- Una estrategia dominante para el jugador i maximiza su pago para cualquier estrategia que el rival pueda jugar.

Equilibrio de Nash

Definiciones

Un conjunto de estrategias $(s_1, \ldots, s_N)$ es un **Equilibrio de Nash** (EN) si $\forall i = 1, \ldots, I$, se cumple que

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(\tilde{s}_i, s_{-i}), \qquad \forall \tilde{s}_i \in S_i$$

- En un EN cada jugador esta jugando la mejor respuesta a las mejor respuesta de sus rivales.

Equilibrio de Nash

Definiciones

Un conjunto de estrategias $(s_1, \ldots, s_N)$ es un **Equilibrio de Nash** (EN) si $\forall i = 1, \ldots, I$, se cumple que

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(\tilde{s}_i, s_{-i}), \qquad \forall \tilde{s}_i \in S_i$$

- En un EN cada jugador esta jugando la mejor respuesta a las mejor respuesta de sus rivales.

Ejemplo

- En el ejemplo: *no confesar* es una estrategia estrictamente dominada
- En el ejemplo: *confesar* es una estrategia estrictamente dominante
- $\{c, c\}$ es un EN en el Dilema del prisionero.

Ejemplo

- En el ejemplo: *no confesar* es una estrategia estrictamente dominada
- En el ejemplo: *confesar* es una estrategia estrictamente dominante
- $\{c, c\}$ es un EN en el Dilema del prisionero.

Ejemplo

- En el ejemplo: *no confesar* es una estrategia estrictamente dominada
- En el ejemplo: *confesar* es una estrategia estrictamente dominante
- $\{c, c\}$ es un EN en el Dilema del prisionero.

Representación

		PRISIONERO 2	
		c	$\bar{c}$
PRISIONERO 1	c	$-5\,;-5$	$-1\,;-10$
	$\bar{c}$	$-10\,;-1$	$-2\,;-2$

Índice

Presentación

- Algún jugador tiene información privada
- Si hay información incompleta, hay que considerar las creencias que tiene cada jugador sobre las preferencias de los restantes
- El jugador i tiene una utilidad $u_i(s_i, s_{-i}, \theta_i)$, donde $\theta_i \in \Theta_i$ es una variable aleatoria elegida por la naturaleza que sólo el jugador i observa.

Presentación

- Algún jugador tiene información privada
- Si hay información incompleta, hay que considerar las creencias que tiene cada jugador sobre las preferencias de los restantes
- El jugador i tiene una utilidad $u_i(s_i, s_{-i}, \theta_i)$, donde $\theta_i \in \Theta_i$ es una variable aleatoria elegida por la naturaleza que sólo el jugador i observa.

Presentación

- Algún jugador tiene información privada
- Si hay información incompleta, hay que considerar las creencias que tiene cada jugador sobre las preferencias de los restantes
- El jugador i tiene una utilidad $u_i(s_i, s_{-i}, \theta_i)$, donde $\theta_i \in \Theta_i$ es una variable aleatoria elegida por la naturaleza que sólo el jugador i observa.

Definición

Definiciones

Una estrategia pura para el jugador i en el juego Bayesiano es una función $s_i(\theta_i)$, o **regla de decisión** que establece la elección de estrategia del jugador para cada realización de su tipo θ_i. Ahora el pago del jugador i es estocástico, ya que depende la realización de su tipo:

$$\tilde{u}_i(s_i(.), s_{-i}(.)) = E_\theta[u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i)]$$

- La utilidad del jugador i es el valor esperado de las utilidades que obtiene para cada tipo que puede llegar a ser.

Definición

Definiciones

Una estrategia pura para el jugador i en el juego Bayesiano es una función $s_i(\theta_i)$, o **regla de decisión** que establece la elección de estrategia del jugador para cada realización de su tipo θ_i. Ahora el pago del jugador i es estocástico, ya que depende la realización de su tipo:

$$\tilde{u}_i(s_i(.), s_{-i}(.)) = E_\theta[u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i)]$$

- La utilidad del jugador i es el valor esperado de las utilidades que obtiene para cada tipo que puede llegar a ser.

EN (I)

Teorema

Un perfil de decisión $(s_1(.), ..., s_I(.))$ *es un* ***Equilibrio Bayesiano de Nash*** *en el juego bayesiano* $[I, \{S_i\}, \{u_i(.)\}, \Theta, F(.)]$ *si y sólo si, para todo* i *y para todo* $\bar{\theta}_i \in \Theta_i$ *con probabilidad positiva de ocurrencia, se cumple que*

$$E_{\theta-i}\left[u_i\left(s_i\left(\bar{\theta}_i\right), s_{-i}(\theta_{-i}), \bar{\theta}_i\right) | \bar{\theta}_i\right] \geq E_{\theta-i}\left[u_i\left(s_i^{'}, s_{-i}(\theta_{-i}), \bar{\theta}_i\right) | \bar{\theta}_i\right]$$

para todo $s_i^{'} \in S_i$, *donde la esperanza se toma sobre las realizaciones de los tipos de los demás jugadores y condicional a que el jugador* i *es de tipo* $\bar{\theta}_i$

EN (II)

- Podemos pensar en la realización de cada tipo del jugador i como un jugador diferente que maximiza su beneficio dado su distribución de probabilidad condicional sobre las estrategias de sus rivales
- Cada jugador tomo el valor esperado de la utilidad que recibe en cada uno de los posibles estados de los otros jugadores, dado que soy de tipo $\bar{\theta}_i$

EN (II)

- Podemos pensar en la realización de cada tipo del jugador i como un jugador diferente que maximiza su beneficio dado su distribución de probabilidad condicional sobre las estrategias de sus rivales
- Cada jugador tomo el valor esperado de la utilidad que recibe en cada uno de los posibles estados de los otros jugadores, dado que soy de tipo $\bar{\theta}_i$

Índice

Definición

Definiciones

un **juego en forma extensiva** es:

1- un árbol de juego conteniendo un nodo inicial, otros nodos de decisión, nodos terminales, y ramas que conectan cada nodo de decisión con el nodo sucesor

2- una lista de $N \geq 1$ jugadores, indexados por i, $i = 1, \ldots, N$

3- para cada nodo de decisión la asignación del jugador que debe decidir una acción

4- para cada jugador i, la especificación del conjunto de acciones de i en cada nodo de decisión en el cual tenga que elegir una acción

5- la especificación de los pagos de cada jugador en cada nodo terminal

Subjuegos

Definiciones

una **estrategia** para el jugador i, $s_i \in S_i$ es una lista completa de acciones, una acción para cada nodo de decisión en el cual el jugador tenga que actuar

Definiciones

un **subjuego** empieza en cualquier nodo de decisión del juego original e incluye todos los nodos de decisión siguientes y sus correspondientes nodos terminales

Subjuegos

Definiciones

una **estrategia** para el jugador i, $s_i \in S_i$ es una lista completa de acciones, una acción para cada nodo de decisión en el cual el jugador tenga que actuar

Definiciones

un **subjuego** empieza en cualquier nodo de decisión del juego original e incluye todos los nodos de decisión siguientes y sus correspondientes nodos terminales

Índice

Definición

Definiciones

un resultado es un **Equilibrio de Nash Perfecto por subjuegos** (ENPSJ) si induce un EN en cada subjuego del juego original

- El ENPSJ es un refinamiento del EN
- Permite encontrar resultados consistentes

Definición

Definiciones

un resultado es un **Equilibrio de Nash Perfecto por subjuegos** (ENPSJ) si induce un EN en cada subjuego del juego original

- El ENPSJ es un refinamiento del EN
- Permite encontrar resultados consistentes

Definición

Definiciones

un resultado es un **Equilibrio de Nash Perfecto por subjuegos** (ENPSJ) si induce un EN en cada subjuego del juego original

- El ENPSJ es un refinamiento del EN
- Permite encontrar resultados consistentes

Índice

Presentación

- Muchas veces los juegos se repiten un número finito como infinito de veces
- Si el número de veces es finita, entonces se puede aplicar la noción de ENPSJ por inducción hacia atrás
- Sin embargo, si el juego se repite infinitamente no hay último período por el cual comenzar hacia atrás

Presentación

- Muchas veces los juegos se repiten un número finito como infinito de veces
- Si el número de veces es finita, entonces se puede aplicar la noción de ENPSJ por inducción hacia atrás
- Sin embargo, si el juego se repite infinitamente no hay último período por el cual comenzar hacia atrás

Presentación

- Muchas veces los juegos se repiten un número finito como infinito de veces
- Si el número de veces es finita, entonces se puede aplicar la noción de ENPSJ por inducción hacia atrás
- Sin embargo, si el juego se repite infinitamente no hay último período por el cual comenzar hacia atrás

Definiciones (I)

- Ahora se requiere la **historia** del juego y una **tasa de descuento**

Definiciones

Una **estrategia pura** en un juego repetido infinitamente para el jugador i es una secuencia de funciones $\{s_{it}(.)\}_{t=1}^{\infty}$ que mapea de la historia de las acciones previas (H_{t-1}) a su elección de acción en el período t, $s_{it}(H_{t-1}) \in S_i$. El conjunto de todas las estrategias puras para el jugador i es $\sum_i$

Definiciones (I)

- Ahora se requiere la **historia** del juego y una **tasa de descuento**

Definiciones

Una **estrategia pura** en un juego repetido infinitamente para el jugador i es una secuencia de funciones $\{s_{it}(.)\}_{t=1}^{\infty}$ que mapea de la historia de las acciones previas (H_{t-1}) a su elección de acción en el período t, $s_{it}(H_{t-1}) \in S_i$. El conjunto de todas las estrategias puras para el jugador i es $\sum_i$

Definiciones (II)

Definiciones

Un perfil de estrategias $s = (s_1, s_2)$ para los jugadores $1, 2$ en un juego repetidos infinitamente es de **reversión a Nash** si la estrategia de cada jugador implica jugar un sendero Q hasta que algún jugador se desvía y jugar el EN de una etapa (x_1^*, x_2^*) en adelante

ENPSJ

Teorema

Un perfil de estrategias con reversión a Nash que juega el sendero $X = \{x_{1t}, x_{2t}\}_{t=1}^{\infty}$ antes de cualquier desvío es un ENPSJ si y sólo si:

$$\hat{\pi}_i(x_{it}) + \frac{\delta}{1-\delta}\pi_i(x_1^*, x_2^*) \leq v_i(X, t)$$

$\forall t$ *e* $i = 1, 2$.

- Esta proposición establece que un perfil de estrategias X es un ENPSJ si da un valor descontado mayor a la mejor alternativa descontada de un juego en una etapa.

ENPSJ

Teorema

Un perfil de estrategias con reversión a Nash que juega el sendero $X = \{x_{1t}, x_{2t}\}_{t=1}^{\infty}$ antes de cualquier desvío es un ENPSJ si y sólo si:

$$\hat{\pi}_i(x_{it}) + \frac{\delta}{1-\delta}\pi_i(x_1^*, x_2^*) \leq v_i(X, t)$$

$\forall t$ *e* $i = 1, 2$.

- Esta proposición establece que un perfil de estrategias X es un ENPSJ si da un valor descontado mayor a la mejor alternativa descontada de un juego en una etapa.

Extensión

Teorema

Sea un sendero de resultados X que puede sostenerse como un ENPSJ utilizando reversión a Nash cuando la tasa de descuento es δ. Entonces también puede sostenerse para cualquier $\delta' \geq \delta$.